Kombinatorik

Henning Tillmann

26. November 2006

1 Permutationen

1.1 Nicht alle Objekte nutzen

Angenommen, in einer Urne sind n Bälle enthalten, wobei auf jedem Ball eine Nummer notiert sein soll. Dadurch ist sichergestellt, dass sich alle Bälle unterscheiden. Wir ziehen k-mal und legen die gezogenen Bälle nicht zurück. Die Reihenfolge, in der die Ziffern gezogen werden, sehen wir als relevant an. Die Anzahl der k-Permuationen aus n Elementen ist gegeben durch:

$$P(n, k) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beweis: Die Aussage ist eine direkte Konsequenz der Produktregeln. Für das Ziehen des ersten Elements haben wir n Alternativen, dann noch $n-1$, $n-2$, bis wir beschließen, nach dem k-ten Ziehen aufzuhören.

1.2 Alle Objekte einbeziehen

Ein wichtiger Spezialfall ist $k = n$, wenn wir alle in der Urne enthaltenen Objekte entnehmen, ohne sie zurückzulegen. Die Urne ist nach dem Experiment leer. Wir sprechen in diesem Fall einfach von einer *Permutation*. Für die Anzahl der Permutationen von n Elementen gilt:

$$P(n, n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Eine andere Interpretation der k-Permutationen ist ein Modell, in dem wir k verschiedene Objekte in n verschiedene Fächer verteilen. Dabei soll in jedem Fach höchstens ein Objekt liegen.

2 Permutationen mit Wiederholung

Lassen wir bei dem Gedankenexperiment die Bedingung fallen, dass nur ein Objekt abgelegt wird pro Fach, dann bedeutet das für das Urnenmodell:

Falls die Kugel nach dem Ziehen direkt wieder in die Urne gelegt werden, gibt es bei k Entscheidungen immer wieder n Wahlmöglichkeiten. Mit der Produktregel ergibt sich als Gesamtzahl der gerodneten Auswahlen n^k. Also: Die Anzahl der k-Permutationen mit Wiederholung einer Menge M mit n Elementen beträgt n^k für jedes $k \geq 1$.

3 Kombinationen

Kommt es bei dem Ziehexperiment nur darauf an, welche Elemente in der Ergebnismenge liegen, ohne auch noch eine Ordnung darauf zu definieren, dann erhalten wir weitaus weniger Möglichkeiten. In diesem Fall sprechen wir von *Kombinationen*. In der Interpretation des Verteilens von Objekten auf einzelne Fächer bedeutet eine Kombination, dass wir ununterscheidbare Objekte, z.B. schwarze Kugeln, auf die Fächer verteilen.

Jede k-Kombination selbst können wir auf insgesamt $k!$ verschiedene Weisen anordnen.

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$$

$C(n,k)$ ist die Anzahl der Verteilung von k gleichen Objekten auf n verschiedene Fächer.

4 Kombinationen mit Wiederholung

Legen wir beim Ziehen aus der Urne die Objekte wieder zurück, sprechen wir von k-Kombinationen mit Wiederholung; jetzt wird auch $k > n$ möglich.

$$D(n,k) = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$$